文章编号: 1001 - 9081(2007)06 - 1479 - 03

# 一种直观快捷的光滑插值曲线表示方法

何坤金,陈正鸣
(河海大学 计算机及信息工程学院,江苏 常州 213022)
(kjinhe@webmail.hhuc.edu.cn)

**摘　要**:提出了一种简单的参数均匀插值曲线表示方法,分析了该表示法的相关性质,并提出了该插值曲线光滑拼接的方法。该方法直观、易控制、效率较高、有一定的实用性。实验表明,采用低阶(一般小于 6阶)参数插值方程实现连接,效果好。

**关键词**:插值;参数曲线;基函数;样条曲线
**中图分类号**: TP391.72　　**文献标识码**:A

# Visual and quick method of smoothing interpolation curve

HE Kun-jin, CHEN Zheng-ming
(*College of Computer & Information Engineering, Hehai University, Changzhou Jiangsu* 213022, *China*)

**Abstract:** An easy parametric uniform interpolation was presented and its characteristics were analyzed in this paper. A method of its smoothing connection was presented and this method was visual, easily controlled, effective and practicable. The experimental result shows that the parametric curve of uniform interpolation in less than 6 rank is better in performance.

**Key words:** interpolation; parametric curve; basis function; spline curve

## 0 引言

曲线、曲面造型是计算机图形学和计算机辅助几何设计的一项重要内容,主要研究在计算机图像图形系统的环境下对曲线与曲面的表示、设计、显示和分析。经多年的发展,已有了比较成熟的 Bezier[1]和 B样条[2,3]表示方法。

插值方式在曲线造型和表示中有着重要应用。在插值方式中要求插值函数 $f(x)$ 通过区间 $[a, b]$上 $n+1$个互异点 $(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$,即需要 $f(x_i) = y_i$。常见的曲线插值方法有:样条插值、拉格朗日插值等。现有的样条插值方法[4~6]由于要反求控制点,在使用时计算量较大,实现较麻烦。传统的拉格朗日插值方法直接实现多点插值时,每增加一点时,每一项都要重新计算,计算量大;当插值点很多时,插值曲线很难控制;插值曲线采用显函数表示,当斜率大时不易精确计算。

本文使用拉格朗日插值思想,推导出一种参数均匀插值方程的表示方法,并分析了该表示方法的相关性质;采用低阶的参数均匀插值方程实现了多个序列点的光滑拼接。

## 1 参数曲线表示及其特点

曲线、曲面表示形式通常有:显式表示、隐式表示、参数式表示。

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

曲线的参数表示即是将曲线上各点的坐标表示成参数方程的形式。若取参数为 $t$,则曲线的参数表示式为:

参数方程中的参数 $t$可以代表任何量,如时间、弧长、角度等,依据不同的应用场合而定。在工程应用中,由离散点来近似地决定曲线和曲面,即通过测量或实验得到一系列有序点列,通过这些点列,用插值法构造出一条光滑曲线或曲面,以直观地反映出实验特性、变化规律和趋势,称为插值曲线或曲面。

在计算机辅助设计与图形系统中,参数方程与其他表示形式相比较,其优点有:

1) 有更大的自由度来控制曲线和曲面的形状;

2) 与坐标轴无关;

3) 便于处理斜率无穷大的问题,不会因此而中断计算;

4) 用参数表示曲线时,因为参数变量是规范化的,$t$的变化限制在 $[0, 1]$范围内,所以曲线总是有界的。

下面给定一组有序离散的数据点 $P_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$。

1) 如何构造参数均匀插值方程 $p(t) = [x(t), y(t)]$或 $p(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ $t \in [0, 1]$来表示经过这 $n+1$个点;

2) 介绍该参数均匀插值方程的性质;

3) 对生成的低阶参数均匀插值曲线段,如何实现光滑连接。

## 2 参数均匀插值曲线的表示及其性质

构造多项式插值曲线时,必须使曲线方程的待定系数、矢量个数等于给定的插值条件数即数据点的数目[7]。因此,在构造一条顺序通过数据点 $P_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$的多项式插值曲线时,其插值曲线方程应为:$p(t) = \sum_{i=0}^{n} (P_i B_{i,n}(t))$,其中,$B_{i,n}(t)$为 $(i = 0, 1, \cdots, n)$基函数。

### 2.1 参数均匀插值曲线的表示

设过 $P_0, P_1, \cdots, P_{n+1}$的 $n+1$点的 $n$次参数曲线方程 $p(t)$ $(t \in [0, 1])$,用均匀插值方法来构造曲线方程 $p(t)$,$t_i$分别取 $0, 1/n, 2/n, \cdots, (n-1)/n, 1$时,使 $p(t_i) = P_i$。构造 $p(t)$为

**收稿日期**: 2006 - 12 - 27;**修订日期**: 2007 - 02 - 12　**基金项目**:江苏省"六大人才高峰"项目资助(06 - D - 034)

**作者简介**:何坤金(1974 - ),男,安徽繁昌县人,讲师,硕士,主要研究方向:计算机图形算法与实现; 陈正鸣(1965 - ),男,浙江东阳人,教授,博士,主要研究方向:计算机 CAD&CG

下列的参数多项式:

$$p(t)=B_{0,n}(t)P_0+B_{1,n}(t)P_1+\cdots+B_{i,n}(t)P_i+\cdots+B_{n,n}(t)P_n,\quad t\in[0,1]$$

其中 $B_{i,n}(t)$ 为不高于 $t$ 的 $n$ 次多项式。由参数均匀插值定义可得:

$$B_{i,n}(t)=((t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_n))/((t_i-t_0)(t_i-t_1)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n))$$

$$=\prod_{j=0\cap j\neq i}^{n}(t-t_j)\Big/\prod_{j=0\cap j\neq i}^{n}(t_i-t_j)$$

$$i=0,1,\cdots,n;\ t\in[0,1];\ t_i=i/n$$

例 1 过两点的均匀插值参数方程 $p(t)=B_{0,1}(t)P_0+B_{1,1}(t)P_1=(1-t)*P_0+t*P_1\ (t\in[0,1])$。表示一条直线(如图 1(a)所示)。过三点的均匀插值参数方程 $p(t)=B_{0,2}(t)P_0+B_{1,2}(t)P_1+B_{2,2}(t)P_2=(1-2t)*(1-t)P_0+4t*(1-t)P_1+t*(2t-1)P_2\ (t\in[0,1])$。表示一条二次曲线(如图 1(b)所示)。过四点的均匀插值参数方程 $p(t)=B_{0,3}(t)P_0+B_{1,3}(t)P_1+B_{2,3}(t)P_2+B_{3,3}(t)P_3=(1-3t)*(1-3t/2)*(1-t)P_0+9*t*(1-3t/2)*(1-t)P_1+9/2*t*(3t-1)*(1-t)P_2+t*(1-3t)*(1-3t/2)*P_3\ (t\in[0,1])$。表示一条三次曲线(如图 1(c))。

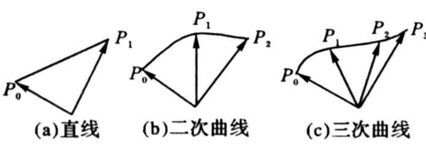



图 1 参数均匀插值曲线

### 2.2 n次参数均匀插值方程及基函数的性质

参数曲线 $p(t)=B_{0,n}(t)P_0+B_{1,n}(t)P_1+\cdots+B_{i,n}(t)P_i+\cdots+B_{n,n}(t)P_n\ (t\in[0,1])$ 有如下一些基本性质。

性质 1: 参数方程 $p(t)$ 的 $n+1$ 个插值点 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 的基函数之和恒为常数 1,即 $\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)=1$。

证:令 $g(t)=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)$,由于 $g(t)$ 是 $t$ 的 $n$ 次一元多项式,$t$ 分别取 $0,1/n,2/n,3/n,\cdots,k/n,\cdots,1$ 时,$g(t)$ 的值分别为:$g(0)=1$,$g(1/n)=1$,$g(2/n)=1,\cdots,g(1)=1$ 即 $g(0)=g(1/n)=g(2/n)=\cdots=g(k/n)=g(1)=1$,$n$ 次一元多项式 $g(t)$ 有 $n+1$ 个相同值,因此 $g(t)\equiv1$,$p(t)$ 的基函数之和恒为常数 1。

性质 2: 对称性,由插值点序列 $Q_n,Q_{n-1},\cdots,Q_0$(其中 $Q_i=P_{n-i}$,$i=0,1,\cdots,n$)构造出的参数均匀曲线,与点序列 $P_0,P_1,\cdots,P_{n+1}$ 构造出的参数均匀曲线形状相同,走向相反。

证明: $P_0$ 基函数 $B_{0,n}(t)=\prod_{j=1}^{n}(t-t_j)\Big/\prod_{j=1}^{n}(t_0-t_j)$,$\cdots$,$P_k$ 基函数 $B_{n,k}(t)=\prod_{j=0\cap j\neq k}^{n}(t-t_j)\Big/\prod_{j=0\cap j\neq k}^{n}(t_k-t_j)$;

即需证明 $P_0$ 基函数 $B_{0,n}(t)$ 等于 $P_n$ 基函数 $B_{n,n}(1-t)$,$P_k$ 基函数 $B_{k,n}(t)$ 等于 $P_{n-k}$ 基函数 $B_{n-k,n}(1-t)$:

1) 令 $u=1-t$,$B_{n,n}(1-t)=\prod_{j=0}^{n-1}(u-u_j)\Big/\prod_{j=0}^{n-1}(u_n-u_j)=(u-u_0)/(u-u_n)*\prod_{j=1}^{n}(u-u_j)\Big/\prod_{j=0}^{n-1}(u_0-u_j)=\prod_{j=1}^{n}(t-t_j)\Big/\prod_{j=1}^{n}(t_0-t_j)=B_{0,n}(t)$

2) $k\neq0$ 或 $n$ 时,令 $u=1-t$,$B_{n-k,n}(1-t)=\prod_{j=0\cap j\neq n-k}^{n}(u-u_j)\Big/\prod_{j=0\cap j\neq n-k}^{n}(u_{n-k}-u_j)=\prod_{j=0\cap j\neq k}^{n}(t-t_j)\Big/\prod_{j=0\cap j\neq k}^{n}(t_k-t_j)=B_{k,n}(t)$

因此,$p(t)$ 具有对称性。

其基函数 $B_{i,n}(t)=\prod_{j=0\cap j\neq i}^{n}(t-t_j)\Big/\prod_{j=0\cap j\neq i}^{n}(t_i-t_j)\ (i=0,1,\cdots,n;\ t\in[0,1];\ t_i=i/n)$。横坐标为 $t$,纵坐标为 $B_{i,n}(t)$ 的图形如图 2所示(图 2分别给出 $n=2\cdots7$,$t\in[0,1]$ 的情况)。

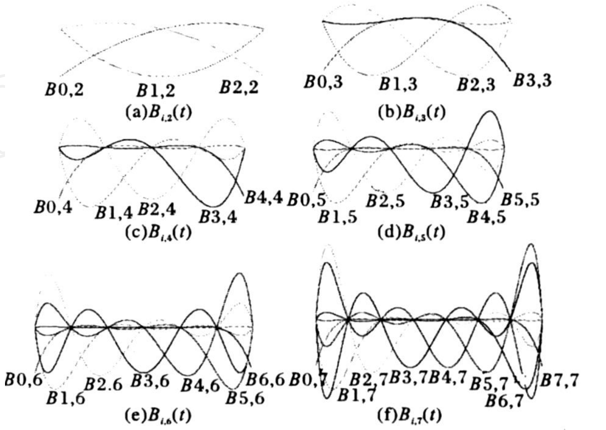



图 2 基函数 $B_{i,n}(t)$ 的对称图

试验分析基函数 $B_{i,n}(t)$ 的性质有:

性质 1 基函数 $B_{i,n}(t)$ 随着 $n$ 的增大,其波动性越来越大,难以控制,一般情况下,$n$ 小于 6时,其图形的波动性较小。

性质 2 基函数 $B_{i,n}(t)$ 中,$B_{i,n}(t)$ 和 $B_{n-i,n}(t)$ 在 $t=0.5$ 处对称,即 $B_{i,n}(t)=B_{n-i,n}(1-t)$。

性质 3 基函数 $B_{i,n}(t)\ (i=0\cdots n,\ t\in[0,1])$ 的曲线簇关于 $t=0.5$ 对称。

## 3 参数均匀插值方程生成多点光滑曲线

### 3.1 低阶参数均匀插值方程实现光滑拼接的算法

本文用上面介绍的低阶参数均匀插值法实现较多点的光滑拼接,其算法思想是:

1) 先对多个序列点进行分组,生成多个低阶参数均匀插值方程;

2) 构造拼接函数,实现相邻两段插值曲线的光滑拼接;

3) 重复步骤 2),直到最后生成一条光滑曲线;

例 2 有 6点 $P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_5$ 序列点,按 3点一组可分 $(P_0,P_1,P_2)$,$(P_1,P_2,P_3)$,$(P_2,P_3,P_4)$,$(P_3,P_4,P_5)$ 可生成四个曲线,然后相交曲线再进行光滑拼接(光滑连接后如图 3所示)。

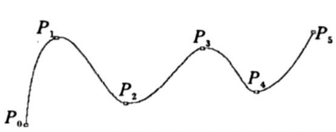



图 3 二次曲线对 6点光滑拼接

### 3.2 光滑拼接函数的构造与实现

下面对两个相邻的低阶参数均匀曲线方程,构造一个拼接函数 $f(t)$ 实现两曲线段的光滑拼接。

令 $p_1(t)$、$p_2(t)$ 是两个低阶参数均匀曲线方程,$f(t)$ 为拼接函数。$f(t)$ 的基函数可采用线性基函数($1-t$ 与 $t$),平方阶基函数($t^2$ 与 $1-t^2$),三角基函数等来实现。

例 3 假设有 4点 $P_0,P_1,P_2,P_3$ 序列点,先生成的两个二

次参数均匀曲线 $p_1(t)$、$p_2(t)$,然后再用 $f(t)$ 进行拼接。

1) 由 $P_0, P_1, P_2$ ($k_1 = 2$, $k_1$ 为 $p_1(t)$ 插值方程的次数) 生成的二次参数均匀曲线方程为 $p_1(t)$,如图 4(a)。

$p_1(t) = (1-2t)*(1-t)P_0 + 4t*(1-t)P_1 + t*(2t-1)P_2$ ($t \in [0,1]$); $p_1(0) = P_0$, $p_1(0.5) = P_1$, $p_1(1) = P_2$

2) 由 $P_1, P_2, P_3$ ($k_2 = 2$, $k_2$ 为 $p_2(t)$ 插值方程的次数) 生成的二次参数均匀曲线方程为 $p_2(t)$,如图 4(a)。

$p_2(t) = (1-2t)*(1-t)P_1 + 4t*(1-t)P_2 + t*(2t-1)P_3$ ($t \in [0,1]$); $p_2(0) = P_1$, $p_2(0.5) = P_2$, $p_2(1) = P_3$

3) 构造一个连接函数 $f(t)$,函数 $f(t)$ 是连接 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 的公共区域 (如图 4(b)), $P_1$ 到 $P_2$ 之间的曲线段。

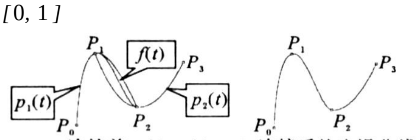
$f(t) = (1-t)*p_1(u) + t*p_2(v)$ ($t \in [0,1]$)

其中 $u = u(t)$, $v = v(t)$,且 $p_1(u(0)) = p_1(1-1/k_1) = P_1$, $p_1(u(1)) = p_1(1) = P_2$, $p_2(v(0)) = p_2(0) = P_1$, $p_2(v(1)) = p_2(1/k_2) = P_2$。

因此,可构造拼接函数:

$$f(t) = (1-t)*p_1(1+(t-1)/k_1) + t*p_2(t/k_2) = (1-t)*p_1(1+(t-1)/2) + t*p_2(t/2)$$

$t \in [0,1]$




(a)连接前$p_1(t)$,$p_2(t)$　(b)连接后的光滑曲线

图 4　光滑连接两段二阶参数均匀曲线

构造的拼接函数 $f(t)$,可得如下一些性质:

性质 1　$p_1(t)$ 的点 ($t = (k_1-1)/k_1$) 是连接函数 $f(t)$ ($t=0$) 的起点, $p_1(t)$ 的终点 ($t = k_1/k_1 = 1$) 是连接函数 $f(t)$ ($t=1$) 的终点; $p_2(t)$ 的起点 ($t=0$) 是连接函数 $f(t)$ ($t=0$) 的起点, $p_2(t)$ 的点 ($t = 1/k_2$) 是连接函数 $f(t)$ ($t=1$) 的终点。即 $f(0) = p_1((k_1-1)/k_1) = p_2(0)$, $f(1) = p_1(1) = p_2(1/k_2)$。

性质 2　参数曲线 $p_1(t)$ 与 $f(t)$ 在 $P_1$ 点处具有 1阶几何连续性 (记作 $G^1$ 连续性); 参数曲线 $p_2(t)$ 与 $f(t)$ 在 $P_2$ 点处具有 1阶几何连续性。

证明: $f'(t)|_{t=0} = ((1-t)*p_1'(u)*u'(t) - p_1(u) + t*p_2'(v)*v'(t) + p_2(v))|_{t=0} = p_1'(1-1/k_1)*u'(0) - p_1(1-1/k_1) + p_2(0) = p_1'(1-1/k_1)*u'(0) = C*p_1'(u(0))$ (令 $C = u'(0)$)

可得在 $P_1$ 点处具有 1阶几何连续性[8];类似,可得在 $P_2$ 点处具有 1阶几何连续性。

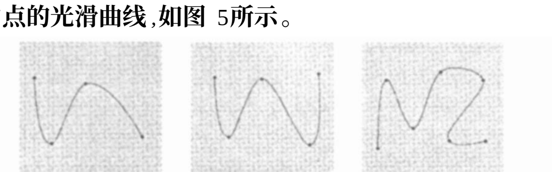
性质 3　整个曲线的阶数是 $f(t)$ 函数的阶数为 $\max(J(p_1(t)), J(p_2(t))) + J$(基函数),其中 $J$ 为求 $f(x)$ 的基函数的阶, max为求两数的大数。

用此拼接函数,可实现任意多个插值顶点的光滑连接,直到整个曲线光滑。此方法简单、灵活,易控制,稳定性较好,效率较高,具有一定的实用性,表 1给出对几种曲线实现多点插值的比较。

表 1　不同样条曲线实现插值进行比较

| 名称 | 基函数 | 特点 |
|---|---|---|
| Bézier曲线 | $B_{i,n}(t) = C_n^i(1-t)^{n-i}t^i$, $i = 0\cdots n$ | 计算量较大、反求控制点、无局部修改性 |
| NURBS样条 | $R_{i,n}(t) = W_iB_{i,n}(t) \Big/ \sum_{j=0}^{n} W_jB_{i,n}(t)$, $i = 0\cdots n$, $W_i$ 为权值 | 计算量大、反求控制点、无局部修改性 |
| 参数均匀插值曲线 | $B_{i,n}(t) = \prod_{j=0 \cap j \neq i}^{n}(t-t_j) \Big/ \prod_{j=0 \cap j \neq i}^{n}(t_i-t_j)$, $i = 0, 1, \cdots, n$; $t \in [0,1]$; $t_i = i/n$ | 计算量较大、无局部修改性 |
| 低阶参数均匀插值曲线 | 本文介绍的方法实现光滑拼接 | 计算量较小、无需反求控制点、有局部修改性 |

例 3:　采用 2阶参数均匀插值方程 (拼接函数为 $f(t) = (1-t)*p_1(1+(t-1)/2) + t*p_2(t/2)$),分别实现 4点、5点、7点的光滑曲线,如图 5所示。



(a)4点的光滑曲线　(b)5点的光滑曲线　(c)7点的光滑曲线

图 5　2阶参数均匀插值方程实现光滑连接

## 4　结语

本文介绍了一种直观快捷的低阶参数均匀插值方法实现光滑曲线,试验表明,此方法:1) 低阶插值情况下 (一般 $n < 6$),效果较好[9]; 2) 对于插值点较多情况下,直接采用插值法,图形的波动较大,难控制;则需要进行分段处理,再进行光滑连接; 3) 对于绘制具有对称性的封闭曲线,一般效果较好; 4) 程序的时间复杂度为 $O(n^2)$[10]; 5) 此方法也适宜于三维空间曲线的光滑连接。

**参考文献**:


[1] Bézier, P. E. Mathematical and practical possibilities of UNISURF [M]. Computer Aided Geometric Design, in: Barnhill, Academic Press, New York, 1974. 127 - 152.

[2] TILLER W. Rational B-splines for curves and surface representation [J]. IEEE Computer Graph Application, 1983, 3(1): 61 - 69.

[3] GORDON W J, RIESENFELD R E. B-spline curves and surface [M]. Computer Aided Geometric Design, in: Barnhill R. E. and Riesenfeld, R. F., eds. Academic Press, New York, 1974. 95 - 126.

[4] FARIN G. NURB Curves and Surfaces [J]. Boston: Peters AK, 1995.

[5] FARIN G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design [M]. A Practical Guide, 2th ed., San Diego: Academic Press, 1990.

[6] GRAVESEN J. Curves for Computer Aided Geometric Design [D]. Department of Mathematics Technical University of Denmark.

[7] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B样条 [M]. 北京:高等教育出版社, 2001. 45 - 53.

[8] 孙家广. 计算机图形学 [M]. 第 3版. 北京:清华大学出版社, 2000. 297 - 298.

[9] YAMAGUCHI F. Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design [M]. Springer-Verlag, 1988.

[10] 王晓东. 算法设计与分析 [M]. 北京:清华大学出版社, 2003.